

SOLUTII CEZAR IVANESCU

Cl. a V-a

- 1) $u(a) = u[(3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) + \dots + (3^{2005} + 3^{2006} + 3^{2007})] = u[0 + 0 + \dots + 0 + (3 + 9 + 7)] = 9$; pe de alta parte $a = (3^{2007} + 3^{2006}) + (3^{2005} + 3^{2004}) + \dots + (3^3 + 3^2) + 3 = 3^{2006}(3 + 1) + 3^{2004}(3 + 1) + \dots + 3^2(3 + 1) + 3 = M_4 + M_4 + \dots + M_4 + 3 = M_4 + 3$, dar $k^2 = M_4$ sau $k^2 = M_4 + 1$ (1), deci a nu este patrat perfect; propozitia (1) se demonstreaza astfel; fie $k = M_4 + r$, $r < 4$; avem $(M_4 + r)^n = M_4 + r^n$; in cazul nostru $n = 2$, dand valori lui r obtinem $r^n \in \{0, 1\}$;
- 2) distingem doua cazuri; i) $n = 2k+1$, atunci $17^n = 17^{2k} = 17^{2k} \cdot 17 = 17^{2k} \cdot (4+4+9) = 17^{2k} \cdot (2^2 + 2^2 + 3^2) = (2 \cdot 17^k)^2 + (2 \cdot 17^k)^2 + (3 \cdot 17^k)^2$;
- ii) $n = 2k$, atunci $17^n = 17^{2k} = 17^{2k-2} \cdot 17^2 = 17^{2k} \cdot (144 + 144 + 1) = 17^{2k} \cdot (12^2 + 12^2 + 1^2) = (12 \cdot 17^{k-1})^2 + (12 \cdot 17^{k-1})^2 + (17^{k-1})^2$;

3) $29 \cdot 30 = (28 + 1)(28 + 2) = (M_4 + 1)(M_4 + 2) = M_4 + 2$, deci raman doua patratele neacoperite.

CLASA a VI-a

- 1)
$$\left. \begin{array}{l} a - b = p^n \\ 3a + b = 170 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a = 168 + p^n + 2 \Rightarrow M_4 = M_4 + p^n + 2 \Rightarrow p^n + 2 = M_4 \Rightarrow$$
$$p^n = M_4 - 2 \Rightarrow p^n : 2 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a - b = 2^n \\ 3a + b = 170 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 2^n + b \\ 3a + b = 170 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(b + 2^n) + b = 170 \Rightarrow 4b + 3 \cdot 2^n = 170 \Rightarrow M_4 + 3 \cdot 2^n = M_4 + 2 \Rightarrow n = 1$$
 (daca $n = 0$ sau $n > 1$, obtinem resturi diferite in membrii egalitatii) $\Rightarrow 4b = 164 \Rightarrow b = 41 \Rightarrow a = 43$;
- 2) $(56, 65) = 1 \Rightarrow \overline{1234abcd} : (56 \cdot 65) \Rightarrow \overline{1234abcd} : 3640$; avem $1234000 = 3640 \cdot 3390 + 400 \Rightarrow 1234000 + 3460 - 400 = 12343240$ este primul numar cerut; urmatorul (si ultimul) este $12343240 + 3640 = 12346880$;
- 3) Figura ramasa are $2 \cdot 11 - 1 = 21 = 3 \cdot 7$ patratele, deci acoperirea este posibila; patratele invecinate celui eliminate pot fi acoperite cu o piesa; raman $2 \cdot 9 = 3 \cdot (2 \cdot 3)$ patratele, adica 3 dreptunghiri de dimensiuni 2 si 3; un astfel de dreptunghi poate fi acoperit de doua piese; deci acoperirea intregii figuri este realizata.

CLASA a VII-a

1) avem $\overline{abc} + \sqrt{c} = k^2 \Rightarrow \sqrt{c} \in N \Rightarrow c \in \{0;1;4;9\}$; i) $c = 0 \Rightarrow \overline{ab0} = k^2 \Rightarrow b = 0$

\Rightarrow

$\overline{abc} \in \{100;400;900\}$ (1); ii) $c = 4 \Rightarrow \overline{ab6} = k^2 \Rightarrow u(k) \in \{4;6\} \Rightarrow k \in \{14;16;24;26\}$

$\overline{abc} \in \{196;256;576;676\}$ (2); iii) $c \in \{1;9\} \Rightarrow u(\overline{abc} + \sqrt{c}) = 2$, deci nu avem

solutii in acest caz;

2) Avem $AM = MC = 2$; notam $AP = x$; aplicam T. Menelaos in tr. ABC (cu transversala P - M - N) si obtinem

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{x}{x+3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x = 3.$$

CLASA a VIII-a

1) $9n = (10 - 1)(10 + 1)(10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1)(10^{16} + 1) \Rightarrow 9n = 10^{32} - 1 \Rightarrow$

$$9n = \overline{1000\dots00} - 1 \Rightarrow 9n = \overline{999\dots99} \Rightarrow n = \overline{111\dots11}; \text{ suma ceruta este}$$

32cifre 32cifre 32cifre

egala cu 32;

3) - cu 3 fete vopsite sunt 6 cubulete (cele de pe colturi);

a. cu 2 fete vopsite sunt $4 \cdot (10 - 2) + 4 \cdot (8 - 2) + 4 \cdot (6 - 2) = a$;

b. cu o fata vopista sunt

$$2 \cdot [(10 - 2) \cdot (6 - 2) + (8 - 2) \cdot (6 - 2) + (10 - 2) \cdot (8 - 2)] = b$$

c. ramase nevopsite sunt $6 \cdot 8 \cdot 10 - 6 - a - b$.